La importància de l'Anàlisi *situs* en l'estudi de les equacions diferencials, encara és més gran quan hom passa del primer al segon ordre i més enllà. En veritat, no dóna per ell sol la solució, no és suficient per a obtenir-la; però, malgrat això, hom no pot ignorar-lo sense perdre's. Quan l'ordre augmenta, hom s'ha d'entendre amb la Topologia de les varietats de *n* dimensions.

Són sempre aquestes qüestions les que hom retroba quan fa l'assaig d'altres estudis semblants al de Poincaré, sobre les corbes traçades sobre les superfícies: per exemple sobre les geodèsiques, de les quals m'he ocupat en el cas en què tota la superfície és arreu de curvatures oposades (*).

Resulta que aquestes qüestions de les geodèsiques sobre les superfícies de curvatures oposades es relacionen amb una part ben distinta de l'obra de Poincaré, amb la teoria de les funcions fuchsianes, en les quals el grup fonamental de substitucions lineals que'l deixa invariable pot obtenir-se mitjançant reflexions interpretades en el sentit de l'ús de la Geometria no euclidiana deguda a Klein i a Poincaré.

Hom és conduït a tal grup quan tracta ço que jo he anomenat el billar no euclidià, és a dir, el billar en el

(*) *Journal de Mathématiques*, 1897 i 1898.

qual la llei de la reflexió és la llei no euclidiana. Hom sap que, en aquesta llei, el simètric P' d'un punt P, respecte a una recta d, és el conjugat harmònic respecte a d i al seu pol D.

Si ara suposem que les bandes del billar són rectes (que no es tallen, per exemple, a l'interior de l'el·lipse fonamental), la trajectòria de la bola serà una geodèsica d'una varietat de curvatures oposades, i, altrament, es deduirà d'una línia recta per les substitucions d'un grup fuchsià.

Vinguem ara a les equacions diferencials de segon ordre.

Donat un sistema de segon ordre

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

els principis exposats per al cas del primer ordre subsisteixen, però no són suficients per a resoldre la qüestió. El mètode seguit per Poincaré presenta una remarcable analogia amb la marxa de les idees descrita en la nostra primera conferència (ús de l'estudi local com a preludi de l'estudi general).

Hem vist que es podien considerar, segons Poincaré, els cicles límits, les corbes closes solucions de l'equació de primer ordre.

Es aquí que la pensa de Poincaré s'eixampla i demostra com, en l'estudi dels sistemes de segon ordre, les solucions periòdiques, les corbes closes, en suma, representaran encara un paper fonamental, i aquest paper serà semblant al del punt inicial a partir del qual hom desenrotlla les coordenades d'una corba. Idea fecunda, car és aplicable als ordres superiors, tals com ens els donarà la Mecànica, i l'abast dels quals, fins des del punt de vista dels calculadors, ha estat immens.

I és interessant assenyalar no solament que la primera cosa a estudiar són els caràcters de la superfície des del punt de vista de l'Anàlisi *situs*, sinó que, per al cas de les superfícies de curvatures oposades, hom troba per a les geodèsiques unes formes que es poden deduir de les solucions periòdiques; és a dir, corbes closes (és a dir, solucions periòdiques) i geodèsiques asimptòtiques a les corbes closes o aproximables a corbes closes (*).

Hem vist que, donat un punt d'una corba que ha de satisfer a una equació diferencial, estem en disposició de traçar la tangent que passa per aquest punt, i, en conseqüència, en el sentit que ha estat explicat, determinar un arc *infinitament petit*, a l'entorn del punt inicial; després, que d'aquí, amb Cauchy, hom passa a la determinació d'un arc *suficientment petit*.

Amb Poincaré, coneguda una solució periòdica, en la qual x, y, z siguin funcions periòdiques amb el mateix període de t, essent-ho també les X, Y, Z, hom pot cercar ço que esdevindran les coordenades d'una corba veïna

$$x+\xi \quad , \quad y+\eta \quad , \quad z+\zeta$$

essent les ξ, η, ζ funcions de t; i, en particular, si restaran petites essent-ho inicialment, o si definiran encara una òrbita periòdica.

Es fàcil formar una equació *de variacions* si hom suposa que aquestes resten petites, limitant-se al primer ordre. Aleshores són equacions linials amb coeficients periòdics

(*) Si la superfície té branques tubulars a l'infinit, hi han també geodèsiques que travessen les corbes geodèsiques closes i s'allunyen a l'infinit.

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta$$

$$\frac{d\eta}{dt} = a_2\xi + \ \ldots$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = a_3\xi + \ \ldots$$

Es ben sabut (i es demostra pels mateixos mètodes que els resultats de Fuchs sobre els punts singulars de les equacions lineals) que el sistema es resol per funcions periòdiques de segona espècie que es presenten multiplicades per un factor constant quan hom augmenta d'un període, és a dir, de la forma

$$\xi = \xi_0 e^{\alpha t}$$

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha t}$$

$$\zeta = \zeta_0 e^{\alpha t}.$$

Les α són els *exponents característics*. Es així com s'obtenen les solucions infinitament pròximes a la solució periòdica primitiva.

Per estudiar ara la forma d'aquestes corbes suficientment veïnes de la solució periòdica fonamental, Poincaré imagina una petita àrea normal a aquesta, a la manera d'una rodella que és travessada cada vegada per les solucions que hom estudia.

Partint d'un punt es retroba així un cert nombre de vegades la rodella. Siguin $A_1, A_2, \ldots$ aquests diversos punts. La successió d'aquests punts dóna sobre la rodella un polígon, del qual es dedueixen els punts, els uns dels altres, per una iteració (iteració d'una certa transformació puntual), una mena d'equació de diferències finites. Ara bé: Poincaré ha demostrat, en altre lloc, que l'estudi d'aquesta classe d'equacions és molt semblant al de les equacions diferencials; de manera que les diferents branques que aquests punts dibuixen sobre la rodella, en pendre diverses trajectòries, tenen la mateixa forma que les corbes solució dels sistemes de primer ordre a l'entorn d'un punt singular (nus, focus i coll, en general, i centre en casos més particulars).

Aleshores ja no és difícil tenir idea de la forma de la corba veïna de la solució periòdica, segons la naturalesa del punt singular en el pla de la rodella. El nus i el focus donen corbes asimptòtiques, car els punts A successius s'aproximen indefinidament al punt origen (corresponent a la trajectòria periòdica primitiva). En el cas d'un coll hi haurà dues superfícies, i dues no més, sobre les quals hi ha solucions asimptòtiques, aproximant-se, per a valors $+\infty$ o $-\infty$ de t, a la corba donada. Sobre la nostra rodella, aquestes superfícies donaran per traces dues corbes, les úniques (a l'entorn del punt origen) que resten invariants per la transformació puntual considerada (*).

Falta estudiar el cas d'un centre. Les solucions, en aquest cas, romandrien sobre una superfície toral sense sortir-ne, una superfície tubular que volteja la solució periòdica. Però, tal com el punt singular centre no existeix,

(*) Poincaré demostra l'existència d'aquestes corbes, resolent així un dels problemes més importants de la teoria de la iteració. Em sembla que hi ha aventatge, com m'he proposat de fer en el *Bulletin de la Société Mathématique de France*, a substituir als desenrotllaments en sèrie de Mac-Laurin, aproximacions successives que permeten veure com, en la successió de les iteracions, una àrea qualsevol primitivament donada a l'entorn de l'origen, s'estira de manera que degenera finalment en una o altra de les corbes en qüestió.

en general, aquí també, en general, no s'ha de comptar amb aquestes espècies de solució.

Caldria, primerament, que les condicions anàlogues en nombre infinit fossin complertes; però no podríem a priori afirmar res sobre la convergència uniforme del resultat. Si la convergència uniforme no quedava assegurada no podríem deduir-ne res sobre l'existència mateixa dels desenrotllaments, car, en créixer indefinidament la valor de t, el radi de convergència podria anul·lar-se.

Això és, precisament, ço que passa amb les famoses sèries de Lindstedt, ben conegudes en la Mecànica del cel. Hom es troba justament en un cas semblant.

Es en virtut que les condicions exigides per a l'existència d'un anell que contingui les trajectòries entorn d'una solució periòdica es compleixen que Lindstedt ha pogut eliminar dels desenrotllaments trigonomètrics tots els termes seculars. Però, al contrari, l'existència dels petits divisors que tot mètode trigonomètric suposa, fa que la convergència sigui almenys dubtosa. Veurem, efectivament, en la propera conferència, que cal preocupar-se'n.

I ¿quina és la raó intrínseca que fa que, per a les equacions de la Dinàmica, les condicions necessàries d'existència de les superfícies tubulars (des del punt de vista formal) siguin verificades?

Poincaré ha demostrat que això és degut al següent fet: l'existència dels *invariants integrals*, especialment l'invariant del volum (*) respecte a les coordenades i als paràmetres que constitueix el teorema de la incompressi-

(*) Hi ha tota una cadena d'invariants integrals *dels diversos ordres*, és a dir que són $\int$, $\int\int$, $\int\int\int$, etc., i que es dedueixen els uns dels altres. El primer resulta d'un conegut teorema de Thomson i Tait. (Veure les meves lliçons sobre el *Càlcul de variacions*, llib. II.)

bilitat, molt temps ignorat després de sa primera descoberta per Liouville, retrobat en ses recerques de Termodinàmica per Boltzmann, mig enunciat per Gibbs, i emprat constantment per Poincaré en els seus estudis de Mecànica del cel sense conèixer els treballs dels antecessors.

Avui la demostració d'aquest teorema es manifesta com a immediata. Una condició d'incompressibilitat és (hom ho sap) obtinguda en anul·lar la divergència del camp de les velocitats. Doncs bé: aquesta darrera condició és de verificació immediata per les equacions de la Dinàmica (equacions canòniques de Hamilton).

L'invariant integral és, com l'integral del sistema diferencial, quelcom que es conserva fins entre estats allunyats del sistema, única manera d'obtenir relacions.

Es, per altra banda, una noció en certa manera oposada a la de les superfícies sense contacte, i és a causa d'això que fa possible l'existència de les solucions en les superfícies anulars.

Hom pot concebre-ho immediatament en recordar la significació física de la invariant de volum en el cas de les equacions de la Hidrodinàmica. Expressa la invariància de massa, i, en el cas d'un líquid incompressible, la condició d'incompressibilitat.

Es la integral

$$\int dx\,dy\,dz$$

estesa a una certa superfície límit la valor de la qual, al cap d'un cert temps, es conserva igual si hom pren la nova integral per a les valors als límits que corresponen a les molècules antigues en llurs noves posicions. Igualment, la integral de volum en les canòniques

$$\int dq \ldots dp \ldots$$

(q coordenades, p paràmetres) representa aquí la conservació d'alguna *extensió en fase* (Gibbs).

Hom veu immediatament, de conformitat amb ço que hem dit abans, que no és possible, en general, que hi hagi superfície closa sense contacte allí on hi ha invariant integral (*); car el fet que el volum, per exemple, sigui constant quan els punts segueixen llurs respectives trajectòries és contradictori amb la hipòtesi que totes les trajectòries travessen una mateixa superfície closa de dintre a fora.

Només podria haver-hi excepció si la superfície conté una *deu* (en el sentit dels tractats d'Hidrodinàmica anglesos), punt singular convenient de l'equació (que és ço que nosaltres anomenem *un nus*).

La demostració del fet que no pot haver-hi superfícies closes sense contacte, és com hem vist, la demostració de la desaparició de totes les constants C en el mètode de Linstedt.

(*) Es sobreentén que hom tracta d'un invariant integral *positiu*.